Cálculo de Probabilidades

Introducción

- Si el único propósito del investigador es describir los resultados de un experimento concreto, los métodos analizados anteriormente pueden considerarse suficientes.
- Si lo que se pretende es utilizar la información obtenida para extraer conclusiones generales sobre todos aquellos objetos del tipo de los que han sido estudiados, entonces estos métodos constituyen sólo el principio del análisis, y debe recurrirse a métodos de inferencia estadística, los cuales implican el uso inteligente de la teoría de la probabilidad.

Probabilidad *Dominar la fortuna*

¿Cómo osamos hablar de leyes del azar? ¿No es, acaso, el azar la antítesis de cualquier ley?
Bertrand Rusell

La probabilidad de tener un accidente de tráfico aumenta con el tiempo que pasas en la calle. Por tanto, cuanto mas rápido circules, menor es la probabilidad de que tengas un accidente.

El 33 % de los accidentes mortales involucran a alguien que ha bebido. Por tanto, el 67 % restante ha sido causado por alguien que no había bebido. A la vista de esto y de lo anterior, esta claro que la forma más segura de conducir es ir borracho y a gran velocidad.

- El **cálculo de probabilidades** nos suministra las reglas para el estudio de los experimentos aleatorios o de azar, constituyendo la base para la estadística inferencial.
- Para trabajar con el cálculo de probabilidades es necesario fijar previamente cierta terminología.

Experimentos y Sucesos Aleatorios (condiciones)

- Se puede repetir indefinidamente, siempre en las mismas condiciones
- Antes de realizarlo, no se puede predecir el resultado que se va a obtener
- El resultado que se obtenga, ***e***, pertenece a un conjunto conocido previamente de resultados posibles
- A este conjunto, de resultados posibles, lo denominaremos **espacio muestral** y lo denotaremos normalmente mediante la letra ***E*** **,** ***S*** u ***Ω***
- Los elementos del espacio muestral se denominan **sucesos elementales**

$$e_1, e_2 \in E \Rightarrow e_1, e_2 \; son \; sucesos \; elementales$$

- Cualquier subconjunto de ***E*** será denominado **suceso aleatorio**, y se denotará normalmente con las letras *A*, *B*,…

$$A, B \subset E \Rightarrow A, B \text{ son sucesos aleatorios}$$

- Sucesos aleatorios que aparecen con gran frecuencia en el cálculo de probabilidades son los siguientes:
- Suceso seguro:

  Es aquel que siempre se verifica después del experimento aleatorio, es decir, el mismo *E*

$$E \subset E \Rightarrow E \; es \; el \; suceso \; seguro$$

- Suceso imposible:

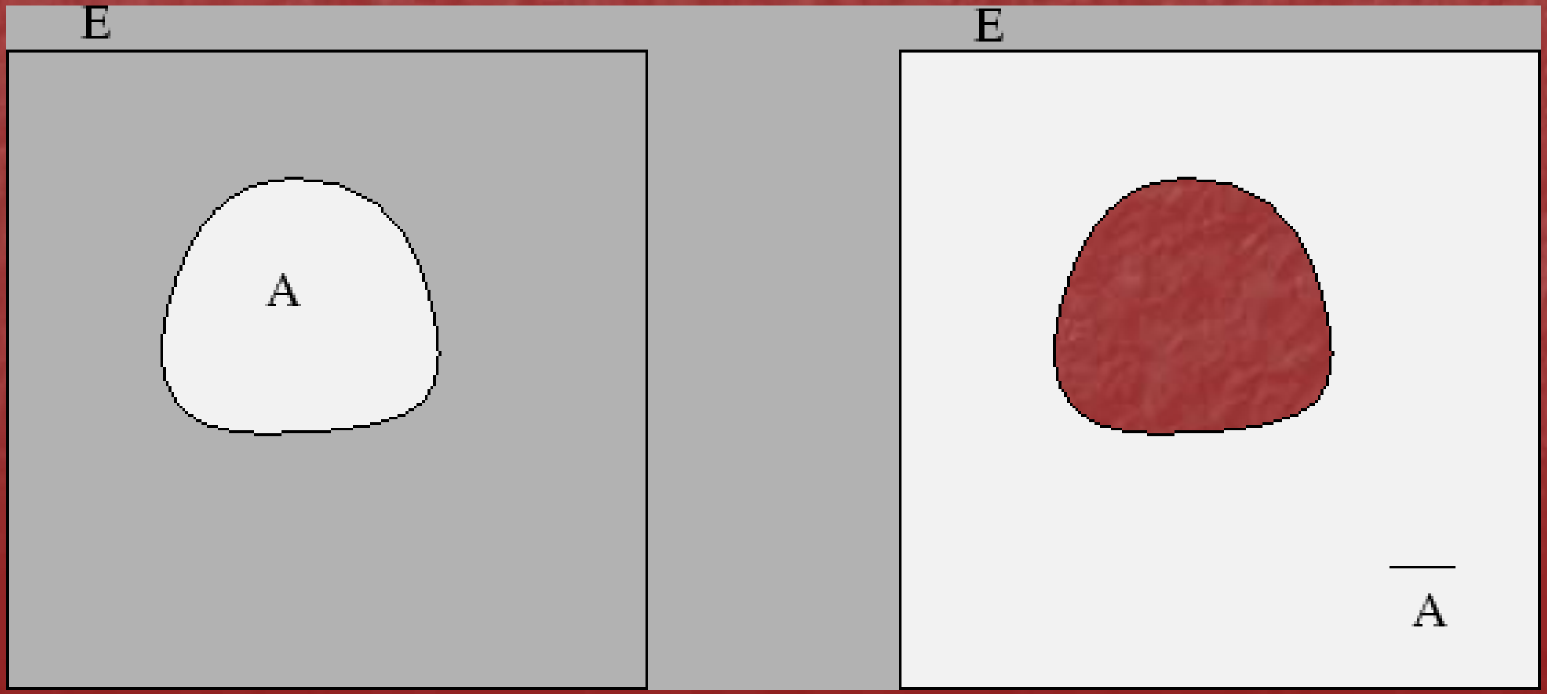
  Es aquel que nunca se verifica como resultado del experimento aleatorio. Como debe ser un subconjunto de *E*, la única posibilidad es que el suceso imposible sea el conjunto vacío (∅)

$$\varnothing \subset E \Rightarrow \varnothing \; es \; el \; suceso \; imposible$$

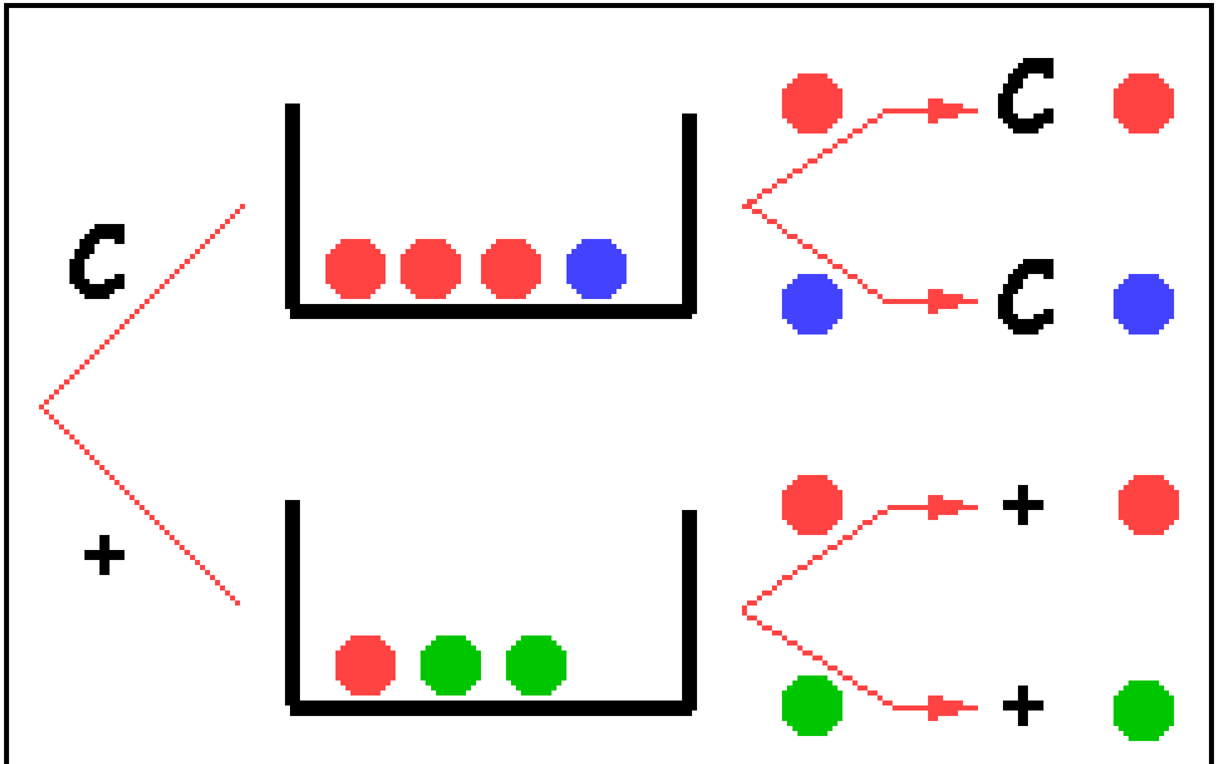
- Suceso contrario a un suceso *A*:

  También se denomina **complementario** de *A* y es el suceso que se verifica si, como resultado del experimento aleatorio, no se verifica *A*. Se acostumbra a denotar con el símbolo $\overline{A}$

$$A \subset E \Rightarrow \underbrace{\overline{A} = \{e \in E : \mathrm{e} \notin \mathrm{A}\}}_{\text{suceso contrario de A}}$$

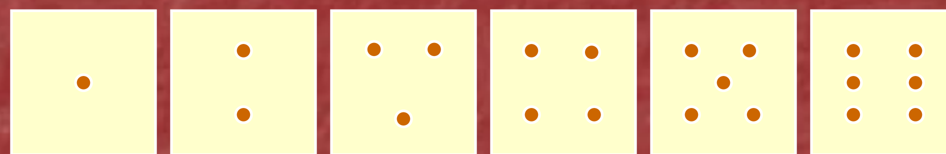


Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda. Si sale cara, se extrae de una urna que contiene bolas azules y rojas una bola, y si sale cruz, se extrae una bola de otra urna que contiene bolas rojas y verdes. ¿Cuál es el espacio muestral *E* de dicho experimento aleatorio?



Ejemplo

- Si realizamos el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire, tenemos:



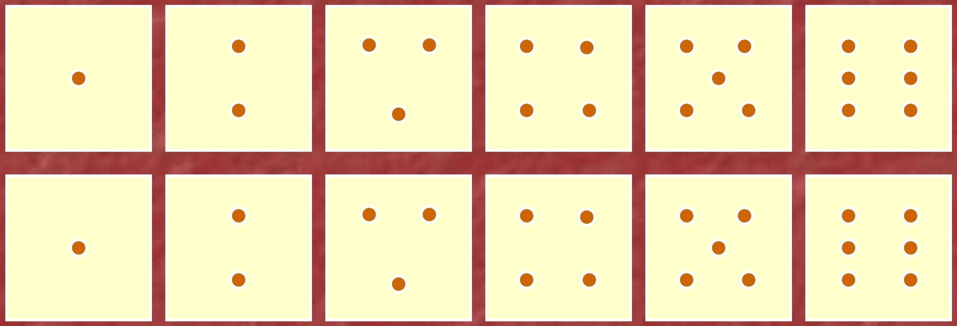
$$Sucesos\ elementales \rightarrow 1,2,3,4,5,6$$

$$Espacio\ muestral \rightarrow E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$Sucesos\ aleatorios \rightarrow \begin{cases} \varnothing\ suceso\ imposible \\ E\ suceso\ seguro \\ \{1,2,3\} \\ \{4,5\} \\ \{2,4,6\} \\ \ldots \end{cases}$$

Ejemplo

- Lanzar un par de dados, marcados c/u con los números 1,2,3,4,5 y 6



$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

A_1: (suma igual a 2): $E_1 = \{(1,1)\}$

A_2: (suma igual a 3): $E_2 = \{(1,2),(2,1)\}$

A_3: (suma igual a 4): $E_3 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

A_4: (suma igual a 5): $E_4 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

A_5: (suma igual a 6): $E_5 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

A_6: (suma igual a 7): $E_6 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

A_7: (suma igual a 8): $E_7 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

A_8: (suma igual a 9): $E_8 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

A_9: (suma igual a 10): $E_9 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

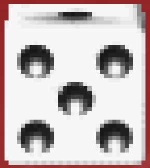
A_{10}: (suma igual a 11): $E_{10} = \{(5,6),(6,5)\}$

A_{11}: (suma igual a 12 $E_{11} = \{(6,6)\}$

Nociones de Probabilidad

- Los eventos aleatorios no son predecibles con absoluta certeza, no obstante podemos medir el grado de confianza con que se hace un pronóstico, sobre la ocurrencia o no de un determinado suceso.

Probabilidad Clásica



Laplace define la probabilidad de un suceso *A* de la siguiente manera:

- Si un evento puede ocurrir de *n* maneras, equiprobables y mutuamente excluyentes, de las cuales *m* maneras son favorables al suceso *A*; se define probabilidad del suceso *A* como:

$$p(A) = \frac{m}{n} \quad \rightarrow$$

$$p(A) = \frac{\text{casos favorables al evento } A}{\text{total de casos posibles del experimento}}$$

Ejemplo

- Lanzamos un dado de seis caras una vez, y queremos saber, $A:\{obtener\ \ un\ número\ impar\}=\{1,3,5\}$

$$S:\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$p(A)=\frac{m}{n}\quad\rightarrow$$

$$p(A)=\frac{casos\ \ favorables\ \ al\ evento\ \ A}{total\ de\ casos\ \ posibles\ \ \ del\ \ exp\ erimento}=\frac{3}{6}$$

Probabilidad Frecuencial

- Si un experimento se repite *n* veces ($n \to \infty$), de las cuales *m* veces se presenta el suceso *A*, entonces es de esperarse que:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{m}{n} \right) = p$$

- La proporción de veces que se presenta el suceso *A* tiende a estabilizarse en un número entre 0 y 1 llamado probabilidad de *A.*

Ejemplo

- Si por ejemplo, lanzamos un dado cien veces y observamos la presencia del número “2” en 16 veces,

  en tal caso

$$p(A) = \frac{16}{100}$$

- *La Teoría de la Probabilidad, como disciplina matemática, puede y debe ser desarrollada a partir de unos axiomas, de la misma manera que la Geometría o el Álgebra.*

Andrei Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*.

Definición axiomática de probabilidad

Se llama probabilidad a cualquier función *P* que asigna a cada suceso *A* del espacio muestral *E* un valor numérico *P(A)*, verificando los siguientes axiomas:

(1) No negatividad: $0 \leq P(A)$

(2) Normalización: $P(E) = 1$

(3) Aditividad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

si $A \cap B = \emptyset$

(donde $\emptyset$ es el conjunto vacío).

Kolmogorov, 1933

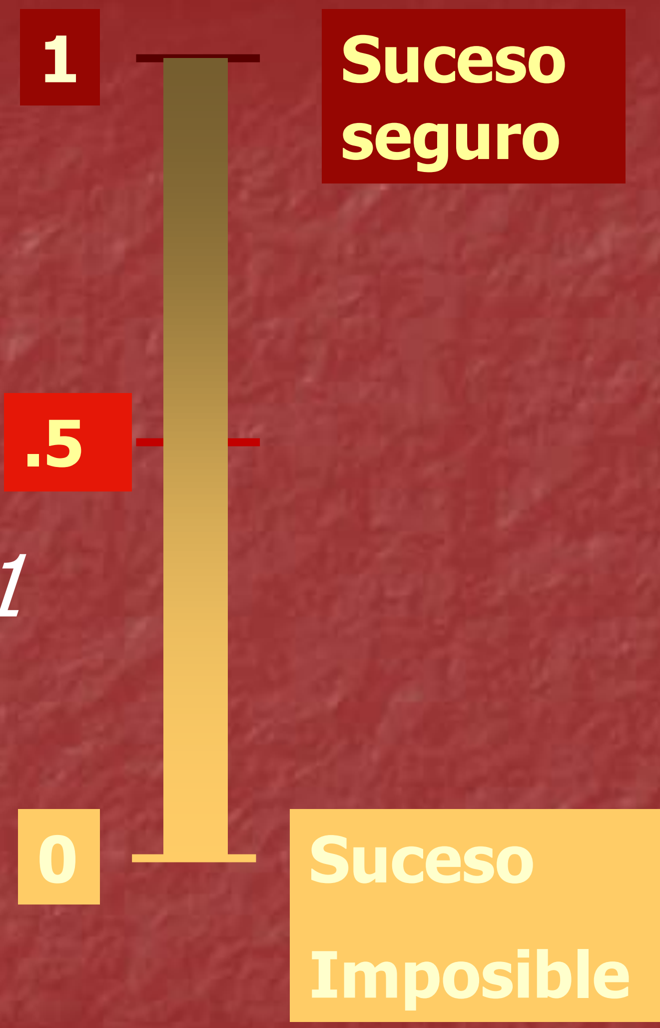
Demostrar que: $P(\varnothing\ ) = 0$

(Utilizar: $\varnothing \cap E = \varnothing$)

$P(E) = P(E \cup \varnothing\ ) =$

$P(E\ ) + P(\varnothing) = 1 + P(\varnothing)$

$\Rightarrow P(\varnothing\ ) = 0$



Demostrar que: $0 \leq P(A) \leq 1$

$1 = P(E) = P(A \cup A^c\ ) =$

$P(A\ ) + P(A^c)$

$\Rightarrow P(A\ ) \leq 1$

Axiomas

- La probabilidad sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 1(no puede haber sucesos cuya probabilidad de ocurrir sea del 200% ni del –5%.
- La probabilidad del suceso seguro es 1, es decir, el 100%.
- La probabilidad del suceso imposible debe ser 0.

Axiomas

- La probabilidad de la intersección de dos sucesos debe ser menor o igual que la probabilidad de cada uno de los sucesos por separado, es decir:

$$P[A \cap B] \leq P[A]$$

$$P[A \cap B] \leq P[B]$$

Axiomas

- La probabilidad de la unión de sucesos debe ser mayor que la de cada uno de los sucesos por separado:

$$P[A \cup B] \geq P[A]$$

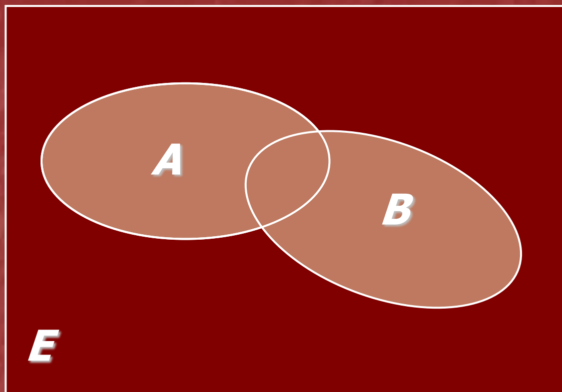
$$P[A \cup B] \geq P[B]$$

Axiomas

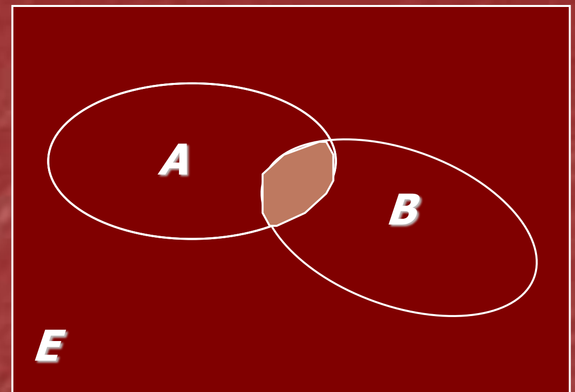
- La probabilidad del suceso contrario de *A*, debe valer:

$$P\left[\overline{A}\right] = 1 - P\left[A\right]$$

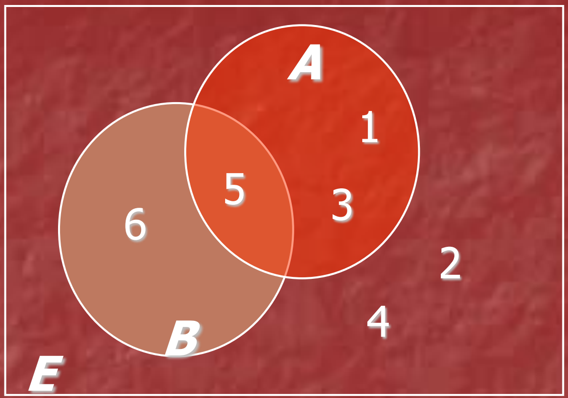
Diagramas de Venn



Unión $A \cup B$



Intersección $A \cap B$



$A=\{1,3,5\}$, $B=\{5,6\}$

$E=\{1,2,3,4,5,6\}$

Sigamos con el dado:

Sucesos *A= Un número impar, B= Un número mayor que 4.*

$$A^c = \{2, 4, 6\} \qquad B^c = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \qquad A \cap B = \{5\}$$

$$(A \cup B)^c = \{2, 4\} \qquad (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Se llama **suceso unión** de A y B, $A \cup B$, al formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos).

Se llama **suceso intersección** de A y B, $A \cap B$, al formado por los resultados experimentales que están simultáneamente en A y B. Dos **sucesos** son **mutuamente excluyentes** si $A \cap B = \varnothing$, donde Ø es el conjunto vacío.

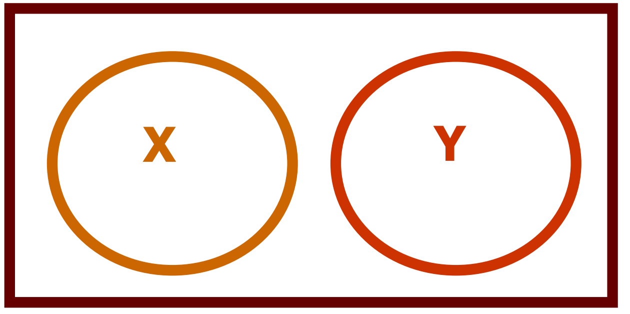
Observemos que un suceso y su complementario son siempre mutuamente excluyentes y su unión es todo el espacio *E*.

$$A \cap A^c = \varnothing, \quad A \cup A^c = E$$

¿Cuál será la probabilidad de dos sucesos mutuamente excluyentes?

$X = \{1, 2\}$ $\quad Y = \{3,4,5,6\}$

$X \cap Y = \{\ \}$



$$P(X \cap Y) = 0$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- Si tenemos los sucesos *A, B* en un experimento aleatorio, con *p(B)>0,* se llama *probabilidad condicional a: p(A/B)* La probabilidad de ocurrencia del evento *"A"* dado que ya se ha presentado el suceso *"B".*

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad , \quad p(B) > 0$$

Ejemplo

- a un grupo de personas se le pregunta sobre la intención de voto para las próximas elecciones.

Sexo / Intención	Masculino	Femenino	Total
Votará	140	80	220
No votará	40	60	100
Total	180	140	320

$$p(M) = \frac{180}{320} \qquad p(F) = \frac{140}{320}$$

$$p(V) = \frac{220}{320} \qquad p(nV) = \frac{100}{320}$$

P (vote dado que es masculino)=

P (vote dado que es femenino)=

$$p(V/M) = \frac{p(V \cap M)}{p(M)} = \frac{\frac{140}{320}}{\frac{180}{320}} = \frac{140}{180}$$

$$p(V/F) = \frac{p(V \cap F)}{p(F)} = \frac{80}{140}$$

INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

$$\text{"}A\text{"}, \text{"}B\text{"} \quad \textit{eventos} \quad \textit{independientes} \quad \leftrightarrow$$
$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

- Por ejemplo la probabilidad de obtener un número impar en el segundo lanzamiento de un dado, no depende de si en el primer lanzamiento se obtuvo un número impar.

Modelos discretos

Experimentos de Bernoulli

- Consideremos un experimento aleatorio con las siguientes características.
  - El experimento sólo tiene dos posibles resultados, uno llamado éxito y el otro llamado fracaso.
  - La probabilidad de éxito es p, y la de fracaso (1-p).

Por ejemplo

- Lanzamiento de una moneda.
- Observar el 1 al lanzar el dado.
- Encuestar a una persona y preguntar estado civil.
- Medir un árbol y ver si cumple o no con una característica específica.

Modelo Matemático

- Sea

$$X = \begin{cases} 1 \quad si \quad hay \quad éxito \\ \\ 0 \quad si \quad hay \quad fracaso \end{cases}$$

Función de Probabilidad de X

- $p(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}$ si $x = 0$ ó $x = 1$

Notación

- $X \sim Ber(p)$

- Significa que X sigue un modelo probabilístico Bernoulli con probabilidad de éxito **p.**

Definición

- Nos referiremos a una sucesión de experimentos de Bernoulli, cuando
  - Cada realización del experimento tenga sólo dos posibles resultados , éxito o fracaso.
  - La probabilidad de éxito es siempre la misma en cada realización , digamos, p.
  - Cada realización del experimento de Bernoulli es independiente de las demás.

Modelo Probabilístico Binomial

- Consideremos una sucesión de experimentos de Bernoulli, donde la probabilidad de éxito es p.

- Definamos la v.a.
- X = número de éxitos en n realizaciones de una sucesión de experimentos de Bernoulli.

Notación

- **$X \sim$ Bin(n,p)**

- Diremos que X sigue un modelo probabilístico Binomial con parámetros n y p.

Propiedades

- La función de probabilidades asociada a esta v.a. es

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}, x = 1,2,....,n$$

Propiedades

- El valor esperado de esta variable es
  - $E(X) = n*p$
- La varianza de X es
  - $V(X) = n*p*(1-p)$